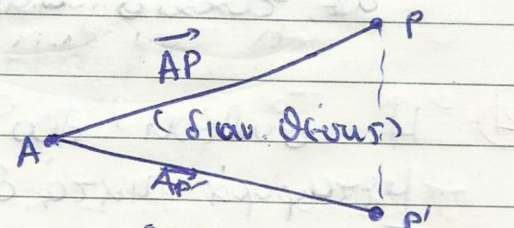
3ος ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ (ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ) ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ.

Ορισμός: Έστω $\varphi : E \to E$ (πχ. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) με $P \longmapsto \varphi(P) = P'$

Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $\vec{PP'} = \vec{\alpha}$, λέγεται παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και συμβολίζεται με $\tau_{\vec{\alpha}}$

$$\vec{PP'} = \vec{AP'} - \vec{AP} \Rightarrow \vec{AP'} = \vec{PP'} + \vec{AP} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{AP'} = \vec{AP} + \vec{a}$$



(εικόνα του P μέσω της $\tau_{\vec{a}}$)

- Έτσι, το $P(x,y,z) \longmapsto P'(x',y',z')$ κατά παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\alpha, \beta, \gamma)$

Αναλυτικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Πρόκειται για μη γραμμικό γεωμ. μετασχ. λόγω της διανυσματικής ποσότητας $\vec{a} = (a, b, \gamma)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

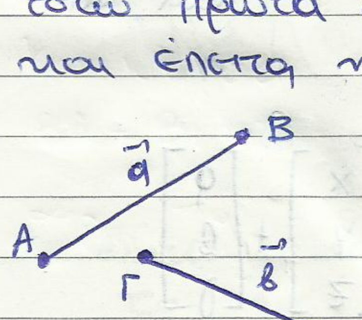
① Υπάρχει μοναδική μεταφορά που απεικονίζει το $P(a,b)$ στο $Q(\gamma,\delta)$ αφού πράγματι $\forall (a,b), (\gamma,\delta)$ θα $\exists! (k,\lambda): \gamma = a+k \;\&\; \delta = b+\lambda$
Αν γνωρίζουμε ότι $P \xrightarrow{\tau_{\vec{a}}} Q$ τότε το τυχόν $X=(x,y)$ απεικονίζεται στο $(x',y')=X'$ με:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma-a \\ \delta-b \end{pmatrix}$$

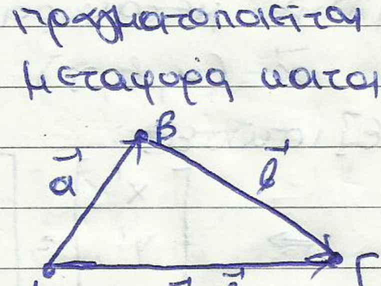
② Αν έχουμε μία μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ η μεταφορά είναι μετασχ. του επιπέδου, που απεικονίζει το X σε ένα Y, έτσι ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{XY}$ και $\vec{a}$ να έχουν ίδιο μέτρο ίδια διεύθυνση, ίδια φορά

③ Μια μεταφορά $\tau_{\vec{a}}$ δεν διατηρεί σταθερά σημεία (εκτός εάν $\vec{a}=0$, ταυτοτικός μετασχ.)
Έστω ας πούμε ότι υπήρχε σταθερό σημείο (έστω A και A' η εικόνα του μέσω του $\tau_{\vec{a}}$)
$A' = \tau_{\vec{a}}(A) = A \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{AA'} = 0 = \vec{a} \Rightarrow$
σε τυχαίο σημείο $\overrightarrow{PP'} = \vec{0}$

④ Η σύνθεση δύο μεταφορών $\tau_{\vec{a}}, \tau_{\vec{b}}$ είναι επίσης μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a}+\vec{b}$ $(=\vec{b}+\vec{a})$. $\tau_{\vec{a}+\vec{b}}$
Σχηματικώς:
Έστω πρώτα εκάστε να πραγματοποιείται κατά $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ και έπειτα η δεύτερη μεταφορά κατά $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{b}$



σύνθεση $\Rightarrow$



Αλγεβρικώς: (Πρώτα μεταφορά κατά $\vec{b}$ και δεύτερη κατά $\vec{a}$)

Έστω $\tau_{\vec{b}}(P)=P'$ και $\tau_{\vec{a}}(P')=P''$

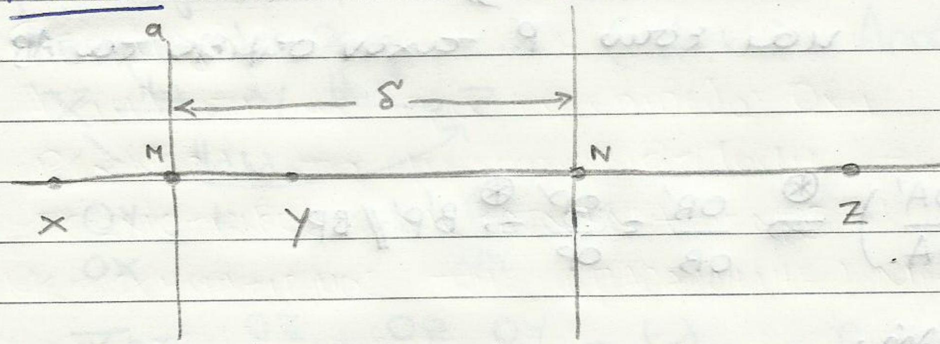
Εξ ορισμού $\overrightarrow{PP'}=\vec{b}$ και $\overrightarrow{P'P''}=\vec{a}$

αλλά $\overrightarrow{PP''}=\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{P'P''}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

Η σύνθεση δύο ανακλάσεων (κατοπτρισμών) με άξονες παράλληλους και σε απόσταση δ είναι μεταφορά κατά ευθύγραμμο τμήμα 2δ

ΛΥΣΗ



Αφού α, β άξονες ανάκλασης ⇒ Μ μέσον του XY

⇒ N μέσον του YZ

$|XZ| = XY+YZ = 2MY+2YN = 2(MY+NY) = 2\delta$.

4ος ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑΣ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός

Δοθέντος αριθμού $k \neq 0$ και σταθ. σημείου Ο του επιπέδου, ονομάζουμε ομοιοθεσία κέντρου Ο και λόγου ομοιοθεσίας k (συμβολισμός $H_{O,k}$) τον μετασχηματισμό που αντιστοιχεί:

α) το σημείο Ο στον εαυτό του και

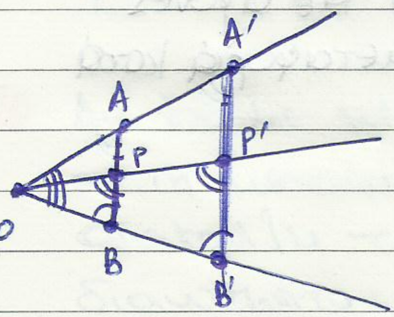
β) σε κάθε άλλο $X \neq O$, αντιστοιχεί το X': $\frac{OX'}{OX}=k$

Έτσι, εξ ορισμού τα σημεία O, X, X' συγγραμμικά)

Άσκηση

Ν.δ.ο. η ομοιοθεσία $H_{O,k}$ απεικονίζει το ευθ. τμήμα AB σε ένα παράλληλο ευθ. τμήμα $A'B'$ για το οποίο ισχύει $\frac{A'B'}{AB}=k$.

Λύση



Έστω ότι μέσω της $H_{O,k}$

$A \mapsto A'$

$B \mapsto B'$

$P \mapsto P' \in A'B'$;;

και έστω P τυχόν σημείο του AB

Έχουμε:

$$\frac{OB'}{OB}=k=\frac{OP'}{OP}\left(=\frac{OA'}{OA}\right) \Rightarrow \frac{OB'}{OB}=\frac{OP'}{OP} \overset{*}{\Rightarrow} B'P' \parallel BP$$

* Αντίστροφο θεωρ. Θαλή:
αν ευθ. τμήμα τέμνει τις δύο πλευρές ενός τριγώνου (ή προεκτάσεις των) έτσι ώστε:
(για την άσκηση) $\frac{OB'}{OB}=\frac{OP'}{OP} \Rightarrow B'P' \parallel$ στην τρίτη πλευρά του τριγώνου $= BP$.

Οι γωνίες των τριγώνων είναι μία προς μία ίσες άρα τα τρίγωνα OBP και $OB'P'$ όμοια

Συνεπώς, $\frac{B'P'}{BP}=k$, ομοίως $\frac{A'P'}{AP}=k$

$B'P' \parallel BP$.

Και μάλιστα

$$BA = BP+PA = \frac{B'P'}{k}+\frac{A'P'}{k}=\frac{B'A'}{k} \Rightarrow AB=\frac{A'B'}{k} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=k$$

άρα το $P \in$ στην ευθεία $(A'B')$

1) Παρατήρηση: Μια ομοιοθεσία απεικονίζει τρίγωνο σε τρίγωνο (όμοιο) και γενικά πολύγωνο σε πολύγωνο (όμοιο)

2) Παρατήρηση: Μια ομοιοθεσία διατηρεί ισότητα γωνιών

3) Παρατήρηση: " " με λόγο $k=1$, είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός

4) Παρατήρηση: Η σύνθεση ομοιοθεσιών $H_{O,k}$ και $H_{O,\lambda}$ ίδιου κέντρου με λόγους k, λ αντίστοιχα είναι και αυτό ομοιοθεσία ίδιου κέντρου με λόγο $k \cdot \lambda$. ($H_{O,k\lambda}$). Αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H_{O,k}"] \arrow[rr, bend right, "H_{O,k\lambda}"'] & Y \arrow[r, "H_{O,\lambda}"] & Z \end{tikzcd}$$

$$\frac{OY}{OX} = k \quad \text{και} \quad \frac{OZ}{OY} = \lambda$$

$$\text{τότε} \quad \frac{OZ}{OX} = \frac{OZ}{OY} \cdot \frac{OY}{OX} = k\lambda$$, O, Z, X συγγραμμικά.

Ορισμός: Δύο τρίγωνα τα οποία έχουν τις πλευρές τους παράλληλες λέγονται ομοιόθετα

ΠΡΟΤΑΣΗ: Δύο ομοιόθετα τρίγωνα είναι όμοια.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω δύο ομοιόθετα τρίγωνα $ΑΒΓ$, $Α'Β'Γ'$ οι ευθείες $ΑΑ'$, $ΒΒ'$, $ΓΓ'$ ή διέρχονται από κοινό σημείο ή είναι μεταξύ τους παράλληλες
Στην περίπτωση κοινού σημείου το O λέγεται κέντρο ομοιοθεσίας (οι γωνίες διατηρούνται και οι πλευρές πολ/ζονται με έναν αριθμό k = λόγος ομοιοθεσίας)
Η πρόταση αυτή εξασφαλίζει το κέντρο O.

ΠΡΟΤΑΣΗ Ο αντίστροφος μετασχηματισμός μιας ομοιοθεσίας $H_{O,k}$ είναι ομοιοθεσία με ίδιο κέντρο και λόγο $\frac{1}{k}$ ($H_{O,\frac{1}{k}}$)